**Дипломна робота**

"Дослідження універсальних абелевих алгебр"

**Зміст**

Введення

1. Основні визначення, позначення й використовувані результати

2. Властивості централізаторів конгруенції універсальних алгебр

3. Формаційні властивості нильпотентних алгебр

4. Класи абелевих алгебр і їхнї властивості

Висновок

Список літератури

**Введення**

Теорія формацій алгебраїчних систем, як самостійний напрямок сучасної алгебри, початок розвиватися порівняно недавно, наприкінці 60-х років минулого сторіччя. Відзначимо, що за наступні чотири десятиліття в таких класичних областях дослідження, як групи, кільця, Чи алгебри, мультікільця й т.д. формаційні методи одержали досить широкий розвиток. У теорії ж універсальних алгебр формаційні методи не знаходять такого широкого застосування, що, у першу чергу, зв'язано зі складністю самого об'єкта досліджень. Тому одержання нових результатів, що стосуються формаційних властивостей універсальних алгебр, становить безсумнівний інтерес. Саме цій задачі присвячується справжня дипломна робота. Тут на основі визначення централізатора конгруенції, уведеного Смітом , дається визначення абелевої алгебри й доводиться основний результат, що клас всіх універсальних абелевих алгебр із мальцевського різноманіття утворить спадкоємну формацію. Також розглядається й властивості абелевих універсальних алгебр.

Перейдемо до короткого викладу результатів дипломної роботи, що містить у собі введення, чотири параграфи й список цитируемой літератури з восьми найменувань.

1 є допоміжним. Тут приводяться основні визначення, позначення й результати, використовувані надалі.

2, 3 носять реферативний характер. Тут докладно з доказами на підставі результатів робіт [1] і [2] викладається теорія централізаторів конгруенції універсальних алгебр і розглядаються формаційні властивості нильпотентних алгебр роботи[3]. Відразу ж відзначимо, що всі розглянуті універсальні алгебри належать фиксированому мальцевскому різноманіттю.

В 4, що є основним, на підставі результатів 3 уводиться поняття абелевої алгебри. Використовуючи методи дослідження роботи [1] доводиться наступний основний результат: клас всіх універсальних абелевих алгебр із мальцевського різноманіття утворить спадкоємну формацію.

**1. Основні визначення, позначення й використовувані результати**

Приведемо визначення основних понять, використовуваних у даній роботі із джерел [1] і[2]. Для введення поняття алгебри необхідно спочатку визначити -арні операції.



Визначення 1.1. Якщо – непуста множина й , те -арної операцією на множині назвемо відображення прямого добутку в. Розглядаються й -арні операції, які по визначенню, відзначають деякий елемент із .



Визначення 1.2. Пари , де – непуста множина, а (можливо, порожнє) множина операцій на , називається універсальною алгеброю або, коротше, алгеброю.



Сукупність операцій (або опрерационних символів) будемо називати сигнатурою. Часто, при введенні алгебри, указують тільки множину й не вказують сигнатуру.



Елемент алгебри відмічуваний -арної операцією . будемо позначати через .



Визначення 1.3. Підмножина називається підалгеброй, якщо для всякої -арної операції ,



а якщо й – -арна операція з , те



Визначення 1.4. Якщо , – алгебри сигнатури , то прямий добуток



ставати алгеброю тієї ж сигнатури, якщо для кожної -арної операції покласти



а для -арної операції , де , –



Виникаюча в такий спосіб алгебра називається прямим добутком алгебр .



Приведемо деякі визначення з

Визначення 1.5. Відображення з алгебри в алгебру називається гомоморфізмом, якщо для будь-яких елементів і кожної -арної операції ( ) справедлива рівність



Якщо ж – нульарна операція, то думаємо



Гомоморфізм алгебри на називається ізоморфізмом і позначається . Гомоморфізм алгебри в себе називається ендоморфизмом алгебри . Ізоморфізм алгебри в себе називається її автоморфізмом.



Визначення 1.6. Конгруенцією на алгебрі називається всяка підалгебра прямого квадрата , що володіє наступними властивостями:



1) (рефлексивність): для всіх ;



2) (симетричність): якщо , те ;



3) (транзитивність): якщо й , те .



Відзначимо, що умови 1) – 3) означають, що – еквивалентністъ на множині .



Визначення 1.7. Нехай – гомоморфізм алгебри в. Ядром гомоморфізму називається підмножина



У роботі [3] приводяться наступні теореми про ізоморфизмах

Теорема 1 Ядро гомоморфізму є конгруенцією.

Визначення 1.8. Якщо – конгруенція на алгебрі й , та множина



називається класом конгруенції . Множина всіх класів конгруенції позначають через . При цьому для кожної -арної операції вважають , а для -арної операції , де , – . алгебру, Що Вийшла, називають фактор-алгеброю алгебри по конгруенції .



Теорема Перша теорема про ізоморфизмах 2 Якщо – гомоморфізм алгебри в , те



Теорема Друга теорема про ізоморфизмах 3 Нехай конгруенція на алгебрі , – підалгебра алгебри . Тоді



Визначення 1.9. Якщо , – конгруенції на алгебрі й утримується в , те позначимо



і назвемо фактором алгебри або фактором на .



Теорема Третя теорема про ізоморфизмах 4 Нехай – фактор на алгебрі . Тоді



Визначення 1.10. Якщо й – конгруенції алгебри , то думають



Теорема 5 Добуток дві конгруенції є конгруенцією тоді й тільки тоді, коли вони перестановочні.

Визначення 1.11. Клас алгебраїчних систем називається формацією, якщо виконуються наступні умови:



1) кожний гомоморфний образ кожної -системи належить ;



2) усякий кінцевий піддекартовий добуток -систем належить .



Визначення 1.12. Формальне вираження , де й – слова сигнатури в рахунковому алфавіті , називається тотожністю сигнатури . Скажемо, що в алгебрі виконане тотожність , якщо після заміни букв будь-якими елементами алгебри й здійснення вхідних у слова й операцій ліворуч і праворуч виходить той самий елемент алгебри , тобто для будь-яких в алгебрі має місце рівність



Визначення 1.13. Клас алгебр сигнатури називається різноманіттям, якщо існує множина тотожностей сигнатури таке, що алгебра сигнатури належить класу тоді й тільки тоді, коли в ній виконуються всі тотожності із множини . Різноманіття називається мальцевським, якщо воно складається з алгебр, у яких всі конгруенції перестановочні.



**2. Властивості централізаторів конгруенції універсальних алгебр**

Нагадаємо, що клас алгебр сигнатури називається різноманіттям, якщо існує множина тотожностей сигнатури таке, що алгебра сигнатури належить класу тоді й тільки тоді, коли в ній виконуються всі тотожності із множини .



Різноманіття називається мальцевським, якщо воно складається з алгебр, у яких всі конгруенції перестановочні.

Усе алгебри вважаються приналежними деякому фіксованому мальцевському різноманіттю. Використовуються стандартні позначення й визначення з[2].

У даній роботі конгруенції довільної алгебри будемо позначати грецькими буквами.

Якщо – конгруенція на алгебрі , то



суміжний клас алгебри по конгруенції . або – діагональ алгебри .



Для довільні конгруенції й на алгебрі будемо позначати множину всіх конгруенції на алгебрі таких, що



тоді й тільки тоді, коли



Тому що , та множина не порожньо.



Наступне визначення дається в роботі[2].

Визначення 2.1. Нехай і – конгруенції на алгебрі . Тоді централізує (записується: ), якщо на існує така конгруенція , що:



1) з



завжди треба



2) для будь-якого елемента



завжди виконується



3) якщо



те



Під терміном «алгебра» надалі будемо розуміти універсальну алгебру. Всі розглянуті алгебри передбачаються вхідними у фіксоване мальцевське різноманіття .



Наступні властивості отримані Смітом[3], сформулюємо у вигляді леми.

Лема 2.1. Нехай . Тоді:



1) існує єдина конгруенція , що задовольняє визначенню 2.1;



2) ;



3) якщо



те



З леми 2.1. і леми Цорна треба, що для довільної конгруенції на алгебрі завжди існує найбільша конгруенція, що централізує . Вона називається централізатором конгруенції в і позначається .



Зокрема, якщо , те централізатор у будемо позначати .



Лема 2.2. Нехай , – конгруенції на алгебрі , , , . Тоді справедливі наступні твердження:



1) ;



2) , де ;



3) якщо виконується одне з наступних відносин:



4) із завжди треба



Доказ:

1) Очевидно, що – конгруенція на , що задовольняє визначенню 2.1. У силу пункту 1) леми 2.1. і .



2) – конгруенція на , що задовольняє визначенню 2.1. Значить



3) Нехай . Тоді



Застосуємо до останнього трьох співвідношенням мальцевський оператор такий, що



Тоді одержимо



Аналогічним образом показуються інші випадки з пункту 3).

4) Нехай



Тоді справедливі наступні співвідношення:



Отже,



де – мальцевський оператор.



Тоді



тобто .



Тому що



те .



У такий спосіб . Лема доведена.



Наступний результат виявляється корисним при доказі наступних результатів.

Лема. 2.3. Будь-яка підалгебра алгебри , що містить діагональ , є конгруенцією на алгебрі .



Доказ:

Нехай



Тоді з



треба, що



Аналогічним образом з



одержуємо, що



Отже, симетрично й транзитивне. Лема доведена.



Доказ наступного результату роботи [1] містить пробіл, тому доведемо його.

Лема 2.4. Нехай . Тоді для будь-якої конгруенції на алгебрі .



Доказ:

Позначимо й визначимо на алгебрі бінарне відношення в такий спосіб:



тоді й тільки тоді, коли



де



Використовуючи лему 2.3, неважко показати, що – конгруенція на алгебрі , причому



Нехай



Тобто



Тоді



і, значить



Нехай, нарешті, має місце



Тоді справедливі наступні співвідношення:



застосовуючи мальцевський оператор до цим трьох співвідношенням, одержуємо



З леми 2.2 треба, що



Тому що



те



Виходить,



Але , отже, .



Отже,



і задовольняє визначенню 2.1. Лема доведена.

Лема 2.5. Нехай , – конгруенції на алгебрі , і – ізоморфізм, певний на .



Тоді для будь-якого елемента відображення визначає ізоморфізм алгебри на алгебру , при якому .



Зокрема, .



Доказ.

Очевидно, що – ізоморфізм алгебри на алгебру , при якому конгруенції , ізоморфні відповідно конгруенціям і .



Тому що



те визначена конгруенція



задовольняючому визначенню 2.1.

Ізоморфізм алгебри на алгебру індуцирує у свою чергу ізоморфізм алгебри на алгебру такий, що



для будь-яких елементів і , що належать . Але тоді легко перевірити, що – конгруенція на алгебрі , ізоморфна конгруенції .



Це й означає, що



Лема доведена.

Визначення 2.2. Якщо й – фактори на алгебрі такі, що



те конгруенцію позначимо через і назвемо централізатором фактору в.



Нагадаємо, що фактори й називаються перспективними, якщо або



або



Доведемо основні властивості централізаторів конгруенції.

Теорема 6 Нехай , , , – конгруенції на алгебрі . Тоді:



1) якщо , те



2) якщо , те



3) якщо , і фактори , перспективні, те



4) якщо – конгруенції на й , те



де , .



Доказ.

1) Тому що конгруенція централізує будь-яку конгруенцію й , те



2) З першого пункту леми 2.2 треба, що



а в силу леми 2.4 одержуємо, що



Нехай – ізоморфізм . Позначимо



По лемі 2.5 , а по визначенню



Отже,



3) Очевидно, досить показати, що для будь-яких двох конгруенції й на алгебрі має місце рівність



Покажемо що



Позначимо . Тоді, відповідно до визначення 2.1. на алгебрі існує така конгруенція , що виконуються наступні властивості:



а) якщо , те



б) для будь-якого елемента ,



в) якщо



те



Побудуємо бінарне відношення на алгебрі в такий спосіб:



тоді й тільки тоді, коли



Покажемо, що – конгруенція на . Нехай



для . Тоді



Тому що – конгруенція, то для кожної -арної операції маємо



Очевидно, що



Отже,



Очевидно, що для будь-якої пари



Виходить,



Отже, по лемі 2.3, – конгруенція на . Покажемо тепер, що задовольняє визначенню 2.1, тобто централізує . Нехай



Тоді



Тому що , і , те . Отже, задовольняє визначенню 2.1.



Якщо , то



виходить,



Нехай, нарешті, має місце (1) і



Тоді



Тому що й , те, отже, . З (2) треба, що , а за умовою . Виходить, і тому



Тим самим показано, що конгруенція задовольняє визначенню 2.1, тобто централізує .



Доведемо зворотне включення. Нехай



Тоді на алгебрі визначена конгруенція



задовольняючому визначенню 2.1. Побудуємо бінарне відношення на алгебрі в такий спосіб:



тоді й тільки тоді, коли



і , .



Аналогічно, як і вище, неважко показати, що – конгруенція на алгебрі . Помітимо, що з доведеного включення в одну сторону треба, що . Покажемо тому, що централізує .



Тому що



те



тобто задовольняє умові 1) визначення 2.1.



Якщо , то



отже,



Нехай має місце (3) і .



Тому що



те



З (4) треба, що , отже,



тобто



На підставі леми 2.2 містимо, що



Отже, .



А тому що , те, тобто



4) Позначимо . Нехай



і задовольняє визначенню 2.1.

Визначимо бінарне відношення на в такий спосіб



тоді й тільки тоді, коли



Аналогічно, як і вище, неважко показати, що – конгруенція, що задовольняє визначенню 2.1.



Це й означає, що



Теорема доведена.

Як наслідку, з доведеної теореми одержуємо аналогічні властивості централізаторів у групах і мультікільцях.

**3. Формаційні властивості нильпотентних алгебр**

Як ми вже відзначали, усе алгебри вважаються приналежними деякому фіксованому мальцевскому різноманіттю й використовуються стандартні позначення й визначення з[1].

Нагадаємо, що для й – конгруенції на алгебрі – говорять, що централізує (записується: ), якщо на існує така конгруенція , що:



1) із завжди треба



2) для будь-якого елемента завжди виконується



3) якщо , те



Очевидно, що для будь-якої конгруенції на алгебрі конгруенція централізує . У цьому випадку .



Помітимо, що якщо й – конгруенції на групі й , те для нормальних підгруп і групи й будь-яких елементів , мають місце наступні співвідношення:



Тоді



і в силу транзитивності із цих співвідношень треба, що



По визначенню 2.1 одержуємо, що



Наступне визначення центральності належить Сміту .

Визначення 3.1. , якщо існує така , що для будь-якого ,



Доведемо, що визначення 2.1. еквівалентно визначенню 3.1. означає умову 1) з визначення 2.1. И навпаки, умова 1) означає, що .



Нехай і – конгруенції, що задовольняють визначенню 2.1. З умови 2) треба, що для будь-якого елемента ,



Доведемо зворотне включення.

Нехай . Тому що , те з умови 2) треба, що



У силу транзитивності маємо



і, виходить, у силу умови 3) . Отже



Покажемо, що з визначення 3.1. випливають умови 2) і 3) визначення 2.1. Якщо , те



Це означає .



Для одержуємо, що



звідки .



Відповідно до роботи

Визначення 3.2. Алгебра називається нильпотентною, якщо існує такий ряд конгруенції



називаний центральним, що



Лема 3.1. Будь-яка підалгебра нильпотентної алгебри нильпотентна.

Доказ:

Нехай – підалгебра нильпотентной алгебри . Тому що має центральний ряд



те для кожного на алгебрі існує конгруенція задовольняючому визначенню 2.1. А саме, з



завжди треба



1) для будь-якого елемента



завжди виконується



2) якщо



и



те



Помітимо, що надалі, для скорочення запису, будемо враховувати той факт, що



тоді й тільки тоді, коли



Побудуємо наступний ряд конгруенції на алгебрі :



де



Покажемо, що цей ряд є центральним. Для цього на алгебрі для кожного визначимо бінарне відношення в такий спосіб:



тоді й тільки тоді, коли



Покажемо, що – конгруенція на алгебрі . Нехай



Тоді



і для кожної -арної операції маємо



Отже,



Отже, – підалгебра алгебри .



Очевидно, що для будь-якого елемента має місце



Таким чином, відповідно до леми 2.3, – конгруенція на алгебрі .



Нехай



Тоді й тому що ,



те



Якщо , то й, виходить,



Нехай, нарешті,



Тоді



і тому що



Отже,



Отже, конгруенція задовольняє визначенню 2.1. для кожного . Лема доведена.



Лема 3.2. Нехай і – конгруенції на алгебрі ,



і – ізоморфізм, певний на алгебрі .



Тоді для будь-якого елемента відображення



визначає ізоморфізм алгебри на алгебру , при якому



Доказ:

Очевидно, що – ізоморфізм алгебри на алгебру , при якому конгруенції й ізоморфні відповідно конгруенціям і .



Тому що , те існує конгруенція на алгебрі , що задовольняє визначенню 2.1. Ізоморфізм алебри на алгебру індуцирує у свою чергу ізоморфізм алгебри на алгебру такий, що



для будь-яких елементів , .



Але тоді легко перевірити, що – конгруенція на алгебрі ізоморфна конгруенції . Це й означає, що



Лема доведена.

Лема 3.3. Фактор-Алгебра нильпотентной алгебри нильпотентна.

Доказ:

Нехай



центральний ряд алгебри . Покажемо, що для будь-якої конгруенції на алгебрі ряд



є центральним, тобто



для кожного . У силу відомих теорем про ізоморфизмах для алгебр (див., наприклад, теореми II.3.7, II.3.11 ) і леми 3.2., досить показати, що



Нехай – конгруенція на алгебрі , що задовольняє визначенню 2.1. Визначимо бінарне відношення на алгебрі в такий спосіб



тоді й тільки тоді, коли найдуться такі елементи , що



Безпосередньою перевіркою переконуємося, що – конгруенція на алгебрі .



У такий спосіб залишилося показати, що задовольняє визначенню 2.1.



Нехай



тоді зі співвідношення



треба, що



Тому що



те . Отже,



Нехай . Тоді для деякого елемента , і .



Таким чином,



отже,



Тому що , те це означає, що



Нехай



де



Покажемо, що . У силу визначення найдуться , що



При цьому мають місце наступні співвідношення:



Отже,



Але тоді по визначенню 3.2.



А тому що , те



Тепер з того, що



треба, що



Лема доведена.

Доказ наступного результату здійснюється простою перевіркою.

Лема 3.4. Нехай – конгруенція на алгебрі , . Полога



тоді й тільки тоді, коли для кожного , одержуємо конгруенцію на алгебрі .



Лема 3.5. Прямий добуток кінцевого числа нильпотентних алгебр нильпотентне.

Доказ:

Очевидно, досить показати, що якщо , і – нильпотентне алгебри, те – нильпотентна алгебра.



Нехай



центральні ряди алгебр і відповідно. Якщо , те, ущільнивши перший ряд повторюваними членами, одержимо центральний ряд алгебри довжини . Таким чином, можна вважати, що ці ряди мають однакову довжину, рівну .



Побудуємо тепер ряд конгруенції на алгебрі в такий спосіб:



де тоді й тільки тоді, коли , , .



Покажемо, що останній ряд є центральним, тобто для довільного . Тому що



те на алгебрах і відповідно задані конгруенції й , що задовольняють визначенню 2.1.



Визначимо бінарне відношення на алгебрі в такий спосіб:



і тільки тоді, коли



и



Легко безпосередньою перевіркою переконатися, що – конгруенція на алгебрі . Залишилося показати, що задовольняє визначенню 2.1.



Нехай має місце



Тоді відповідно до уведеного визначення



звідки треба, що



т.е.



Нехай



Це означає



Але тоді



и



Отже,



Нехай має місце



Це означає, що



Виходить, і , тобто . Лема, доведена.



Як відомо, спадкоємною формацією називається клас алгебр, замкнутих відносно фактор-алгебр, підпрямих добутків і відносно підалгебр.

Результати, отримані в лемах 3.1, 3.3, 3.5 можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 7 Клас всіх нильпотентних алгебр мальцевського різноманіття є спадкоємною формацією.

Визначення 3.3. -арна група називається нильпотентной, якщо вона має такий нормальний ряд



що



и



для кожного .



Тому що конгруенції на -арних групах попарно перестановочні (дивися, наприклад, ), те це дає можливість використовувати отримані результати в дослідженні таких груп.



Лема 3.6. Нехай – -арна група. і – нормальні підгрупи групи й .



Тоді , де й конгруенції, індуковані відповідно підгрупами й на групі .



Доказ:

Підгрупи й індуцирують на групі конгруенції й , обумовлені в такий спосіб:



– -арна операція.



Визначимо на бінарне відношення в такий спосіб:



тоді й тільки тоді, коли існують такі послідовності елементів і з і відповідно, що



Покажемо, що – підалгебра алгебри . Для скорочення запису будемо надалі опускати -арний оператор .



Нехай



Тому що , те



Тому що , те



Тому в силу того, що ,



Отже, – підалгебра алгебри .



Нехай – нейтральна послідовність групи , а, отже, і групи . Тоді з визначення бінарного відношення треба, що



Тим самим довело, що – конгруенція на .



Тo, що задовольняє визначенню 2.1, очевидно. Лема доведена.



Лема 3.7. Нехай – нильпотентна -арна група. Тоді задовольняє визначенню 2.1.



Доказ:

Тому що для кожного , те індуцирує конгруенцію на . У такий спосіб володіє поруч конгруенції, що у силу леми 3.6 буде центральним. Лема доведена.



Зокрема, для довільної бінарної групи звідси треба, що нильпотентна тоді й тільки тоді, коли, задовольняє визначенню 3.2. У цьому випадку теорема 3.2 просто констатує той факт, що клас всіх нильпотентних груп утворить спадкоємну формацію.



**4. Класи абелевих алгебр і їхнї властивості**

Як уже було відзначено в параграфі 3, алгебра називається нильпотентною, якщо існує такий ряд конгруенцій



називаний центральним, що



для кожного .



Визначення 4.1. У випадку, якщо для нильпотентной алгебри в центральному ряді , тобто якщо для неї , то алгебра називається, абелевої.



Лема 4.1. Будь-яка підалгебра абелевої алгебри абелева.

Доказ:

Нехай підалгебра абелевої алгебри .



Тому що по визначенню , то на існує така конгруенція , що:



1) з



завжди треба



2) для будь-якого елемента



завжди виконується



3) якщо



те



Розглянемо конгруенцію



Дійсно, якщо



для , те



і для кожної -арної опеации маємо



Але оскільки підалгебра алгебри , одержуємо



Виходить, підалгебра алгебри .



Очевидно, що для будь-якого елемента має місце



Таким чином, конгруенція на алгебрі .



Нехай



тоді



те Якщо , те



і, виходить,



Нехай, нарешті,



Тоді



і значить .



Отже, конгруенція задовольняє визначенню 2.1. Лема доведена.



Лема 4.2. Фактор-Алгебра абелевої алгебри абелева.

Доказ:

Нехай алгебра – абелева, тобто . Покажемо, що для будь-якої конгруенції на виконується



Нехай – конгруенція на алгебрі , що задовольняє визначенню 2.1.



Визначимо бінарне відношення на алгебрі в такий спосіб:



тоді й тільки тоді, коли найдуться такі елементи , , , , що



Безпосередньою перевіркою переконуємося, що – конгруенція на алгебрі .



У такий спосіб залишилося показати, що задовольняє визначенню 2.1. Нехай



тоді



Нехай



Тоді , і по визначенню 2.1



При цьому й . Відповідно до наших позначень одержуємо, що



Нехай



Тоді найдуться , що



и



При цьому



Отже,



Але тоді по визначенню 3.1. . А тому що , те



Тепер з того, що



треба, що



Лема доведена.

Лема 4.3. Прямий добуток кінцевого числа абелевих алгебр абелево.

Доказ:

Очевидно, досить показати, що якщо , і – абелеви алгебри, те – абелева алгебра.



Нехай і . Це означає, що на алгебрах і задані конгруенції й задовольняюче визначення 2.1.



Визначимо бінарне відношення на алгебрі в такий спосіб:



тоді й тільки тоді, коли



и



Безпосередньою перевіркою переконуємося, що – конгруенція на алгебрі .



У такий спосіб залишилося показати, що задовольняє визначенню 2.1.



Нехай



тоді



Нехай . Це означає, що й . Але тоді



и



Отже,



Нехай



тоді



І



Це означає, що й . У такий спосіб



Лема доведена.

Результати, отримані в лемах 4.1, 4.2, 4.3 можна тепер сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 8 Клас всіх абелевих алгебр мальцевського різноманіття є спадкоємною формацією.

Нехай – конгруенція на алгебрі . – підалгебра алгебри , і . Тоді введемо нове позначення



Лема 4.4. Нехай визначена множина . Тоді – конгруенція на ,



Доказ:

Тому що , те для будь-якого елемента завжди найдеться такий елемент , що . Отже,



де .



У такий спосіб .



Нехай тепер , . Тоді



де . Отже, для кожної -арної операції одержуємо



Тепер, оскільки , те по лемі 3.2 – конгруенція на .



Нехай . Тоді, мабуть,



. Тому що



те



Покажемо тепер, що . Допустимо противне. Тоді найдеться така пари , що й . З визначення треба, що існує така пари , що



Тому що



те застосовуючи мальцевський оператор одержуємо



З леми 2.2. тепер треба, що .



Отже, . Лема доведена.



Підалгебра алгебри називається нормальної в , якщо є суміжним класом по деякій конгруенції алгебри .



Лема 4.5. Будь-яка підалгебра абелевої алгебри є нормальною.

Доказ:

Нехай – підалгебра абелевої алгебри . Тому що , те по лемі 4.4. на існує така конгруенція , що



Лема доведена.

**Висновок**

Таким чином, у даній роботі ми докладно з доказами на підставі результатів робіт [3] і [4] виклали теорію централізаторів конгруенції універсальних алгебр і розглянули формаційні властивості нильпотентних алгебр, на підставі результатів 3 увели поняття абелевої алгебри. Використовуючи методи дослідження роботи [1] довели наступний основний результат: клас всіх універсальних абелевих алгебр із мальцевського різноманіття утворить спадкоємну формацію.



**Список літератури**

Кушніров Л.О., Елементи загальної алгебри. – К., 2003

Шеметков Л.А., Скиба А.Н., Формації алгебраїчних систем. – К., 2004

Smith J.D. Mal'cev Varieties // Lect. Notes Math. 1976. V.554.

Русаков С.О., Алгебраїчні -арні системи. – К., 2003



Кон П., Універсальна алгебра. – К., 2004

Ходалевич О.Д., Властивості централізаторів конгруенції універсальних алгебр . – К., 2004

Ходалевич О.Д. Формаційні властивості нильпотентних алгебр . – К., 2004

Ходалевич А.Д. Прикладна алгебра . – К., 2004